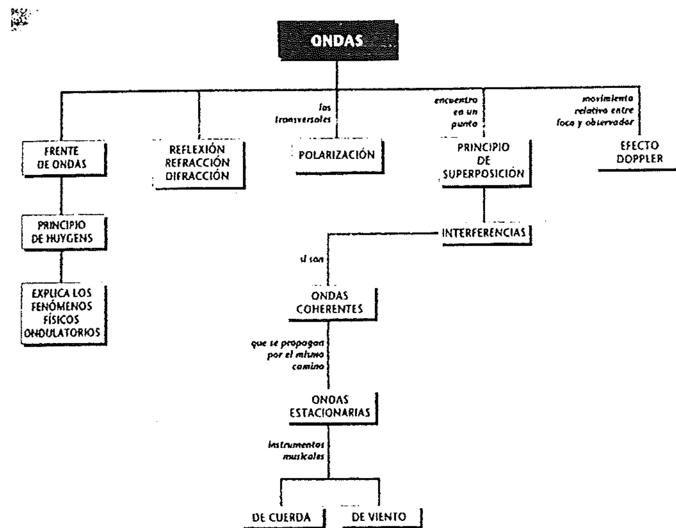


Refurzo de fenómenos ondulatorios



1 **Una onda que se propaga por una cuerda responde a la ecuación, en unidades del sistema internacional: $y_{x,t} = 3 \cdot 10^{-3}\, sen\,(80t - 6x)$.**

Si la cuerda tiene un extremo fijo en una pared, escribe la ecuación de la onda reflejada.

La onda reflejada se propaga hacia la izquierda y está en oposición de fase con la incidente.

$$y_{x,\,t} = 3 \cdot 10^{-3}\, sen\,(80t + 6x + \pi)$$

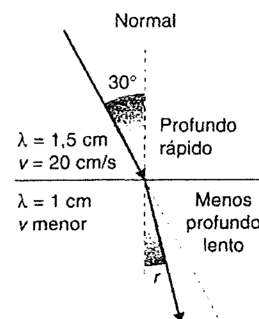
Teniendo en cuenta que: $sen\,(\pi + \alpha) = -sen\,\alpha$, la ecuación de la onda reflejada es:

$$y_{x,\,t} = -3 \cdot 10^{-3}\, sen\,(80t + 6x)$$

2 **Una onda, de 1,5 cm de longitud de onda, se propaga por la superficie del agua de una cubeta de ondas con una velocidad de 20 cm/s. En un instante el frente de ondas accede a una zona menos profunda con un ángulo de 30°, respecto a la perpendicular de la recta que separa los dos medios. Si la longitud de onda en este segundo medio es 1 cm, deduce la dirección por la que se propaga.**

La frecuencia de la onda es la misma en los dos medios, pues es una característica del centro emisor:

$$\nu = \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{20\ \text{cm/s}}{1{,}5\ \text{cm}} = \frac{40}{3}\ \text{Hz}$$



Al pasar al segundo medio, la frecuencia permanece constante y la longitud de onda se acorta, por lo que la velocidad de propagación disminuye, pasando a ser:

$$v_2 = \lambda_2 \cdot \nu = 1\ \text{cm}\ \frac{40}{3}\ \text{Hz} = \frac{40}{3}\ \text{cm/s}$$

Aplicando la ley de Snell: $\dfrac{sen\ i}{sen\ r} = \dfrac{v_1}{v_2}$; $sen\ r = \dfrac{v_1}{v_2}\ sen\ i$

Sustituyendo: $sen\ r = \dfrac{40/3\ \text{cm/s}}{20\ \text{cm/s}} \cdot sen\ 30 = \dfrac{1}{3}$

La dirección de propagación en el segundo medio forma un ángulo con la recta normal:

$$r = arc\ sen\ \frac{1}{3} = 19°\ 28'$$

1 **Al oscilador de una cubeta de ondas se le acopla un accesorio que consta de dos punzones separados por una distancia de 4 cm. Al incidir sobre la superficie del agua generan ondas coherentes con una frecuencia de 24 Hz, que se propagan con una velocidad de 12 cm/s. Determina el tipo de perturbación que existirá en los siguientes puntos: A que dista 10 cm de un foco y 12 cm del otro; B que dista 10 cm de un foco y 9,5 del otro; C que dista 8 cm de un foco y 9,75 cm del otro.**

La longitud de onda de las ondas generadas es: $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{12 \text{ cm/s}}{24 \text{ Hz}} = 0{,}5 \text{ cm}$

Para el punto *A*, la diferencia de caminos a los focos es:

$$s_1 - s_2 = 12 \text{ cm} - 10 \text{ cm} = 2 \text{ cm} = 4 \cdot 0{,}5 \text{ cm} = 4\lambda$$

Que es un número entero de longitudes de onda, las ondas llegan en fase y la interferencia es constructiva.

Para el punto *B*, la diferencia de distancias a los focos es:

$$s_1 - s_2 = 10 \text{ cm} - 9{,}5 \text{ cm} = 1{,}5 \text{ cm} = 3 \cdot 0{,}5 \text{ cm} = 3\lambda$$

Que es un número entero de longitudes de onda, las ondas llegan en fase y la interferencia es constructiva.

Para el punto C, la diferencia de recorridos hasta los focos es:

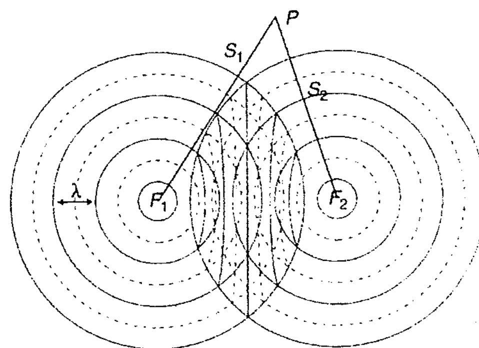
$$s_1 - s_2 = 9{,}75 - 8 \text{ cm} = 1{,}75 \text{ cm} = \frac{7}{2}\, 0{,}5 \text{ cm} = 7\,\frac{\lambda}{2}$$

Que es un número impar de semilongitudes de onda, las ondas llegan en oposición de fase y la interferencia es destructiva.

2 **En dos puntos de la superficie de un estanque se dejan caer simultáneamente gotas de agua. Representa geométricamente la interferencia de las ondas que se generan.**

Al caer las gotas de agua generan ondas circulares. Trazamos con centro en un punto (foco F_1) una serie de círculos concéntricos igualmente espaciados, alternando los de trazo continuo con los de trazo de puntos. Asignamos los trazos continuos a crestas y los trazos de puntos a valles. Duplicamos el dibujo anterior en torno a otro punto que es el foco F_2.

Al superponer los diagramas, se observan puntos en los que se cortan dos crestas o dos valles, interferencia constructiva. Mientras que en los que coincide una cresta con un valle la interferencia es destructiva.



A los puntos del plano cuya amplitud es nula se le llaman nodos y las líneas que los unen, líneas nodales (hipérbolas de trazo discontinuo en el diagrama). Estas líneas responden a una ecuación del tipo:

$$s_1 - s_2 = n \cdot \text{constante}$$

Que es la ecuación de una familia de hipérbolas de focos F_1 y F_2, cuya posición no se ve afectada por la propagación de los movimientos ondulatorios: están en estado estacionario. Lo mismo podemos decir para los puntos de interferencia constructiva, hipérbolas de trazo continuo en el dibujo. Para ondas tridimensionales tendríamos superficies hiperbólicas.

3 **Dos ondas sonoras de ecuación $y = 1{,}2 \cos 2\pi\,(170t - 0{,}5x)$ Pa, proceden de dos focos coherentes e interfieren en un punto P que dista 20 m de un foco y 25 m del otro foco. Determina la perturbación que originan en el punto P cada uno de los focos, en el instante $t = 1$ s. Calcula la diferencia de fase de las dos ondas al llegar al punto considerado y determina la amplitud de la perturbación total en el citado punto.**

La perturbación que origina cada uno de los focos en el instante pedido es:

$$y_{x=20,\,t=1} = 1{,}2 \cos 2\pi\,(170 \cdot 1 - 0{,}5 \cdot 20) = 1{,}2 \cos (2\pi \cdot 160) = 1{,}2\ Pa$$

$$y_{x=25,\,t=1} = 1{,}2 \cos 2\pi\,(170 \cdot 1 - 0{,}5 \cdot 25) = 1{,}2 \cos (2\pi \cdot 157{,}5) = -1{,}2\ Pa$$

Comprobemos que las ondas llegan al punto P en oposición de fase.

$$\delta = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi\,(170t - 0{,}5 \cdot 20)\ rad - 2\pi\,(170t - 0{,}5 \cdot 25)\ rad = 2{,}5 \cdot 2\pi\ rad = 2 \cdot 2\pi + \pi\ rad$$

Las ondas llegan en oposición de fase.

La perturbación total es la suma de la perturbaciones $y_{total} = 0$, la interferencia en el punto P es destructiva. Algo que podemos comprobar comparando la diferencia de recorridos para las ondas con la longitud de onda.

De la ecuación de la onda, obtenemos: $\frac{1}{\lambda} = 0{,}5 \Rightarrow \lambda = 2\text{m}$

$$s_1 - s_2 = 25\ \text{m} - 20\ \text{m} = 5\ \text{m} = \frac{5}{2}\,2 = 5\,\frac{\lambda}{2}$$

que es un número impar de semilongitudes de onda.

---

1 **Una onda estacionaria que responde a la ecuación: $y = 0{,}02\ sen\ 10\,\frac{\pi}{3}x \cos 40\,\pi t$ en unidades del S.I., se propaga por una cuerda.**

Determina la amplitud, frecuencia y longitud de onda de las ondas que por superposición provocan la vibración descrita. Calcula la distancia entre dos nodos de la cuerda.

Una onda estacionaria tiene la misma frecuencia y longitud de onda que las originales. Comparando la ecuación anterior con la ecuación general de una onda estacionaria, tenemos:

$$y = 2A\ sen\ kx \cos \omega t$$

Amplitud: $2A = 0{,}02\ \text{m} \Rightarrow A = 0{,}01\ \text{m}$

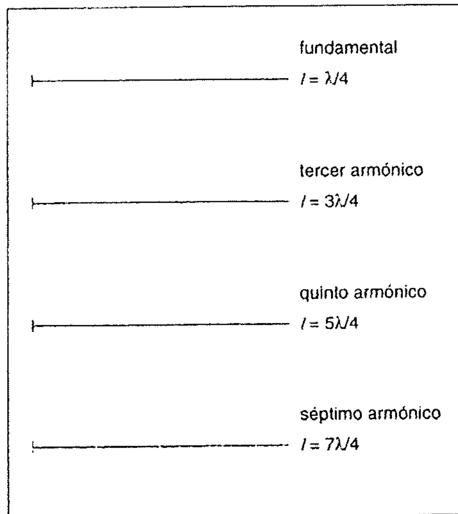
Longitud de onda: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 10\,\frac{\pi}{3} \Rightarrow \lambda = \frac{3}{5}\ m$

Frecuencia: $\omega = 2\pi\nu = 40\,\pi \Rightarrow \nu = 20\ \text{Hz}$

La distancia entre dos nodos consecutivos es igual a media longitud de onda:

$$d = \frac{\lambda}{2} = \frac{3/5\ \text{m}}{2} = 0{,}3\ \text{m}$$

ONDAS ESTACIONARIAS EN UNA CUERDA FIJA POR UN EXTREMO



En una cuerda libre por un extremo sólo son posibles frecuencias múltiplos impares de la fundamental.

Si la cuerda tiene un extremo fijo y el otro libre, en el extremo fijo debe existir un nodo y en el libre, un vientre. Aplicando al extremo libre la ecuación de los vientres:

$$x = (2n + 1)\,\frac{\lambda}{4} = l\ (n = 0, 1, 2, 3\ldots)$$

En una cuerda libre por un extremo, sólo se pueden formar las ondas estacionarias que cumplen que la longitud de la cuerda es un número impar de cuartos de longitudes de onda.

Las ondas estacionarias que se forman cumplen:

$$\lambda = \frac{4l}{2n + 1}$$

Que corresponden a unas frecuencias:

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{\dfrac{4l}{2n+1}} = (2n+1)\frac{v}{4l}$$

Por tanto, sólo son posibles aquellas ondas estacionarias cuya frecuencia sea un múltiplo impar de la frecuencia llamada fundamental $\left(\nu_1 = \frac{v}{4l}\right)$.

Se denomina **armónico** al sonido cuya frecuencia es múltiplo de la de otro llamado **fundamental** y que se produce simultáneamente con éste en los instrumentos musicales.

n	Modo de vibración	Frecuencia	Longitud de onda
0	Fundamental	$\nu_1 = \frac{v}{4l}$	$\lambda_1 = 4l$
1	Tercer armónico	$\nu_2 = 3\,\frac{v}{4l} = 3\,\nu_1$	$\lambda_2 = \frac{4l}{3} = \frac{\lambda_1}{3}$
2	Quinto armónico	$\nu_3 = 5\,\frac{v}{4l} = 5\,\nu_1$	$\lambda_3 = \frac{4l}{5} = \frac{\lambda_1}{5}$

2 Una cuerda tensa y fija por un extremo vibra según la ecuación: $y_{x,t} = 0{,}05\ sen\ \frac{\pi}{6}\,x\ cos\ 20\,\pi t$ con x e y en cm y t en s. Determina la frecuencia de vibración y las distancias entre dos nodos consecutivos.

Comparando con la ecuación general de las ondas estacionarias, tenemos que:

La frecuencia es: $\omega = 2\,\pi\nu = 20\,\pi \Rightarrow \nu = 10$ Hz

La longitud de onda es: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \lambda = 12$ cm

La distancia entre dos nodos es: $\frac{\lambda}{2} = \frac{12\ \text{cm}}{2} = 6$ cm

ONDAS ESTACIONARIAS EN UNA CUERDA FIJA POR SUS DOS EXTREMOS

Si fijamos los dos extremos de la cuerda, en el extremo $x = l$, existe un nodo, por lo que por la condición de nodo:

$$x = 2n\frac{\lambda}{4} = l \Rightarrow l = n\frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3\ldots)$$

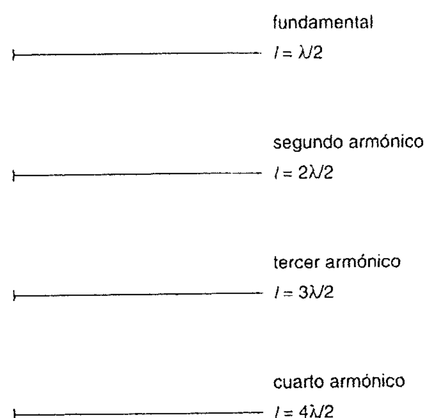
En una cuerda de guitarra, sólo se forman las ondas estacionarias cuyas longitudes de onda sean tales que la cuerda contenga un número entero de semilongitudes de onda.

Las ondas estacionarias que se pueden formar cumplen:

$$\lambda = \frac{2l}{n}$$

Que corresponden a las frecuencias:

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{\frac{2l}{n}} = n\frac{v}{2l}$$



En una cuerda de guitarra son posibles todas las frecuencias múltiplos de la fundamental.

Por tanto, sólo son posibles aquellas ondas estacionarias cuya frecuencia sea un múltiplo de la llamada fundamental $\left(\nu_1 = \frac{v}{2l}\right)$.

n	Modo de vibración	Frecuencia	Longitud de onda
1	Fundamental	$\nu_1 = \frac{v}{2l}$	$\lambda_1 = 4\,l$
2	Segundo armónico	$\nu_2 = 2\frac{v}{2l} = 2\,\nu_1$	$\lambda_2 = \frac{2l}{2} = \frac{\lambda_1}{2}$
3	Tercer armónico	$\nu_3 = 3\frac{v}{2l} = 3\,\nu_1$	$\lambda_3 = \frac{2l}{3} = \frac{\lambda_1}{3}$

3 Una cuerda de guitarra de 1 m de larga fija por ambos extremos vibra formando 4 nodos. Los puntos centrales de la cuerda tienen un desplazamiento máximo de 4 mm. Si la velocidad de las ondas en la cuerda es 660 m/s, determina la frecuencia fundamental de vibración de la cuerda.

Si la cuerda forma cuatro nodos (dos en los extremos), de la figura observamos que la longitud de la cuerda es igual a tres semilongitudes de onda.



$$l = 3\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2l}{3} = \frac{2 \cdot 1\ \text{m}}{3} = \frac{2}{3}\ \text{m}$$

Y la frecuencia de vibración: $\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{660\ \text{m/s}}{2/3\ \text{m}} = 990\ \text{Hz}$

Las frecuencias de vibración de un cuerda con los extremos fijos son: $\nu = n\frac{v}{2l}$

La frecuencia es la fundamental cuando $n = 1 \Rightarrow \nu = 1\frac{660\ \text{m/s}}{2/3\ \text{m}} = 330\ \text{Hz}$

4 Se desea construir una flauta de forma que cuando están tapados todos los agujeros emita una nota de 264 Hz. Si la flauta se comporta como tubo de extremos abiertos, determina la longitud de la misma.

Las ondas estacionarias en una flauta tienen dos vientres en los extremos, por lo que la frecuencia fundamental de vibración es:

$$\nu_1 = 1\,\frac{v}{2l} \Rightarrow l = \frac{v}{2\nu_1} = \frac{340\ \text{m/s}}{2 \cdot 264\ \text{Hz}} = 0{,}65\ \text{m}$$

La flauta debe tener una longitud de 0,65 m.

5 **Una onda estacionaria tiene por ecuación:** $y = 10 \cos \frac{\pi}{6} x \cos 10 \pi t$, **donde** x **e** y **se miden en cm y** t **en s. Determina:**

a) **Magnitudes características de las ondas que al interferir dan lugar a la onda estacionaria.**

b) **La posición de los nodos y la distancia entre un nodo y un vientre consecutivos.**

c) **La velocidad de vibración instantánea de la partícula situada en la posición** $x = 3$ **cm.**

d) **La velocidad máxima de vibración de la partícula situada en la posición** $x = 6$ **cm.**

Si las ondas que interfieren tienen como expresión general:

$$y = A \cos (\omega t + kx) \quad \text{e} \quad y = A \cos (\omega t - kx)$$

Al interferir y como: $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$, la onda estacionaria es:

$$y = 2A \cos \omega t \cos kx$$

Comparando la expresión de la onda estacionaria con la ecuación general.

a) Amplitud: $2A = 10$ cm $\Rightarrow A = 5$ cm

Frecuencia: $\omega = 10 \pi \Rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10\pi}{2\pi} = 5$ Hz

Longitud de onda: $k = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi/6} = 12$ cm

Velocidad de propagación: $v = \lambda \nu = 12 \text{ cm } 5 \text{ s}^{-1} = 60$ cm/s

b) Nodos son los puntos en los que la amplitud es permanentemente cero.

$$y = 0 \Rightarrow \cos \frac{\pi}{6} x = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{6} x = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad x = 3 + 6n \ (n = 0, 1, 2, 3...)$$

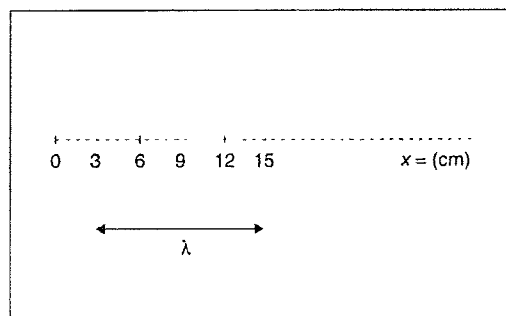
Los nodos están situados en las posiciones:

$x = 3$ cm, 9 cm, 15 cm, 21 cm...

La distancia entre nodos es media longitud de onda: $\frac{\lambda}{2} = 6$ cm

La distancia entre un nodo y un vientre es un cuarto de longitud de onda, es decir:

$$d_{\text{nodo - vientre}} = \frac{\lambda}{4} = 3 \text{ cm}$$



c) La expresión de la velocidad de vibración de una partícula es:

$$v_{\text{vibración}} = \frac{dy}{dt} = -100\pi \cos \frac{\pi}{6} x \ \text{sen}\ 10 \pi t \text{ cm/s}$$

$$v_{x=3} = -100\pi \cos \frac{\pi}{6} 3 \ \text{sen}\ 10\pi t = -100\pi \cos \frac{\pi}{2} \ \text{sen}\ 10\pi t = 0$$

La partícula situada en $x = 3$ cm es un nodo y, por tanto, su velocidad siempre es cero.

d) $v_{x=6} = -100\pi \cos \frac{\pi}{6} 6 \ \text{sen}\ 10\pi t = -100\pi \cos \pi \ \text{sen}\ 10\pi t = 100\pi \ \text{sen}\ 10\pi t$ cm/s

cuyo valor máximo es: $v_{\text{máx}} = 100\pi$ cm/s

Este punto es un vientre, por lo que su velocidad oscila entre $+100\pi$ cm/s y -100π cm/s.